El Plan de Bochum y los fundamentos de las lógicas contraclásicas

Luis Estrada González, IIF-UNAM

loisayaxsegrob@gmail.com

Seminario de Investigadores, 13 de febrero de 2019

1. Introducción

La PREGUNTA que me interesa: ¿el Plan de Bochum es sólo una semántica que da modelos para lógicas raritas o es un proyecto semántico más robusto, uno que explique las características más exóticas de esas lógicas y que incluso las haga plausibles?

Mi HIPÓTESIS: el Plan de Bochum es más que una semántica para lógicas raritas o una maquinaria para producirlas, pero para dar cuenta de (una parte más considerable de) la diversidad lógica es preferible una teoría de *preservacionismo estructural*.

ALGUNAS LIMITACIONES: me enfocaré casi por completo en lógica de orden cero y me restringiré al caso límite de argumentos válidos: los teoremas. No argumentaré en favor de la hipótesis completa, sino sólo de que para dar cuenta de una parte más considerable de la diversidad lógica se necesita algo más que el Plan de Bochum.

2. El reto de las lógicas contraclásicas

Una *lógica contraclásica* es una lógica que, con base en el mismo lenguaje que el de la lógica clásica, valida argumentos que son inválidos en ésta. Ejemplos:

Las lógicas conexivas:	$\sim(\sim A \to A)$; $(A \to B) \to \sim(A \to \sim B)$
	$\sim(A \to \sim A)$; $(A \to \sim B) \to \sim(A \to B)$
Las lógicas abelianas:	$((A \to B) \to B)) \to A$
Las lógicas súper contractivas:	$(A \to (A \to B)) \to B$
Las lógicas con seminegación:	lógicas con teoremas en los que la negación ocurre un número “peculiar” (vis a vis la lógica clásica) de veces.
Las lógicas dialethéicas:	lógicas con al menos un teorema de la forma A y otro de la forma $\sim A$.
Las lógicas súper completas:	lógicas en las que o todo es teorema, o todo es falsedad lógica, o todo argumento es válido o hay una fórmula que es a la vez teorema y falsedad lógica.

Hay por lo menos dos reacciones iniciales ante las lógicas contraclásicas: *incredulidad* –las nociones lógicas están *confundidas*, los signos lógicos tienen el significado preteórico que usualmente corresponde a otros signos– y *prudencia* –los signos lógicos bien podrían ser las nociones lógicas preteóricas pretendidas–.

3. EL PLAN DE BOCHUM

Un *plan* es una teoría semántica para una lógica que sirve para explicar sus rasgos más distintivos y hacerlos plausibles. El Plan de Bochum tiene las siguientes características:

(PB1) Un *modelo* para L es una tripleta $\langle I, (R^2, R^3), \sigma\rangle$, donde I es un conjunto no vacío de índices de evaluación, las R son las relaciones n-arias en I y σ: $I \times L \rightarrow \mathrm{C}(V)$ es una asignación de (construcciones conjuntistas de) valores de verdad $V = \{1, 0\}$ a fórmulas en un índice.

(PB2) Las condiciones de verdad y falsedad para todas las conectivas son tipo FDE:

$\sigma(i, p)\in\mathrm{C}(V)$

$1\in\sigma(i, \top)$ y $0\notin\sigma(i, \top)$

$0\in\sigma(i, \bot)$ y $1\notin\sigma(i, \bot)$

$1\in\sigma(i, \sim A)$ ssi para todo $j\in I$ tal que Rij, $0\in\sigma(j, A)$

$0\in\sigma(i, \sim A)$ ssi para todo $j\in I$ tal que Rij, $1\in\sigma(j, A)$

$1\in\sigma(i, A\wedge B)$ ssi para todo $j, k\in I$ tal que $Rijk$, $1\in\sigma(j, A)$ y $1\in\sigma(k, B)$

$0\in\sigma(i, A\wedge B)$ ssi para todo $j, k\in I$ tal que $Rijk$, $0\in\sigma(j, A)$ ó $0\in\sigma(k, B)$

$1\in\sigma(i, A\vee B)$ ssi para todo $j, k\in I$ tal que $Rijk$, $1\in\sigma(j, A)$ ó $1\in\sigma(k, B)$

$0\in\sigma(i, A\vee B)$ ssi para todo $j, k\in I$ tal que $Rijk$, $0\in\sigma(j, A)$ y $0\in\sigma(k, B)$

$1\in\sigma(i, A\rightarrow B)$ ssi para todo $j, k\in I$ tal que $Rijk$, si $1\in\sigma(j, A)$ entonces $1\in\sigma(k, B)$

$0\in\sigma(i, A\rightarrow B)$ ssi para todo $j, k\in I$ tal que $Rijk$, $1\in\sigma(j, A)$ y $0\in\sigma(k, B)$

(PB3) Consecuencia T $\Gamma\Vdash A$ ssi $1\in\sigma(A)$ siempre que $1\in\sigma(B)$, para toda $B\in\Gamma$.

(PB4) Las condiciones de falsedad de al menos una conectiva se modifican de modo casi coinciden con la condición (clásica) de falsedad de otra conectiva y el resto de la semántica queda intacto.

¡EL PLAN DE BOCHUM EN ACCIÓN!

(En lo que sigue, y a menos de que se especifique lo contrario, supongamos que $i = j = k$, que $i = \varnothing$ y que $\mathrm{C}(V) = \wp(V)$.)

Ejemplo 1. Si cambiamos

$0\in\sigma(i, \sim A)$ ssi para todo $j\in I$ tal que Rij, $1\in\sigma(j, A)$

por

$0\in\sigma(i, \sim A)$ ssi para todo $j\in I$ tal que Rij, $1\notin\sigma(j, A)$

obtenemos la lógica con seminegación **CP** de Kamide, que valida, entre otras cosas,

$(A\rightarrow B) \rightarrow ({\sim\sim}B\rightarrow{\sim\sim}A)$; ${\sim\sim}(A\rightarrow A) \rightarrow B$; ${\sim\sim\sim\sim\sim\sim}(A\wedge{\sim\sim}A)$

Ejemplo 2. $\mathrm{C}(V) = \wp(V)\backslash\varnothing$. Si cambiamos

$0\in\sigma(i, A\rightarrow B)$ ssi para todo $j, k\in I$ tal que $Rijk$, $1\in\sigma(j, A)$ y $0\in\sigma(k, B)$

por

$0 \in \sigma(i, A \rightarrow B)$ ssi para todo j, $k \in I$ tal que $Rijk$, si $1 \notin \sigma(j, A)$ ó $0 \in \sigma(k, B)$

obtenemos la lógica conexiva **CN** de Cantwell, que además valida la

Tesis de Wansing: $\sim(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow \sim B)$

(Con un poco más de lenguaje, obtendríamos **dLP** de Omori; si las R^n no se ignoraran y fueran como en la lógica intuicionista, tendríamos **C** de Wansing, etcétera.)

ALGUNAS PREGUNTAS:

PREGUNTA 1. ¿Cuál es la relación entre la contraclasicidad y las condiciones de falsedad, de tal manera que modificar éstas produce aquella? Peor aún: no parece haber conexión alguna real, pues hay modificaciones a las condiciones de falsedad que no producen contraclasicidad.

> R1. No cualquier modificación produce contraclasicidad. En los casos examinados, esto sólo se obtiene cuando la condición de falsedad se convierte en la condición de falsedad clásica de otra conectiva. La nueva condición de falsedad le confiere otras propiedades a la conectiva, de ahí que se validen argumentos que en la lógica clásica no valen para esa conectiva.

PREGUNTA 2. Incluso si hubiera una relación más o menos plausible entre la contraclasicidad y las condiciones de falsedad, ¿cómo se explican y hace plausibles con el Plan de Bochum casos específicos de contraclasicidad?

> R2. El caso más trabajado es el de la conexividad: no es descabellado pensar que, si se cambian las condiciones de falsedad del condicional, se obtengan teoremas "peculiares" acerca de las interacciones entre el condicional y la negación. La combinatoria está revelando algunas líneas de investigación interesantes para otras conectivas, conjunción y disyunción, principalmente.

PREGUNTA 3. ¿Cómo garantizar que la conectiva con la condición de falsedad modificada sigue siendo una conectiva del mismo tipo que antes de la modificación?

> R3. Gentzenianismo modelo teórico: las condiciones de verdad pueden verse como las condiciones que determinan el significado de una conectiva y la de falsedad puede ser variable.
>
> *Problema*: esto no está justificado y el paralelismo con la semántica de teoría de pruebas es muy imperfecto.

El Plan de Bochum sugiere, pues, prudencia frente a un caso de no clasicidad, incluso de contraclasicidad.

4. ¿UN PROBLEMA PARA EL PLAN DE BOCHUM?

La *transplicación*, $A \rightarrow_T B$, representa un problema para el gentzenianismo modelo teórico:

$1 \in \sigma(i, A \rightarrow_T B)$ ssi para todo j, $k \in I$ tal que $Rijk$, $1 \in \sigma(j, A)$ y $1 \in \sigma(k, B)$

$0 \in \sigma(i, A \rightarrow_T B)$ ssi para todo j, $k \in I$ tal que $Rijk$, $1 \in \sigma(j, A)$ y $0 \in \sigma(k, B)$

Si el gentzenianismo modelo teórico fuera correcto, la transplicación sería una conjunción, no un condicional. Además,

Teorema ERS. Si un condicional $\rightarrow$ debe satisfacer

Separación $A, A\rightarrow B \Vdash B$

Identidad $\Vdash A\rightarrow A$

No simetrías $A\rightarrow B \nVdash B\rightarrow A$ y $A\rightarrow B \nVdash A\wedge B$

entonces la transplicación no es un condicional.

Pero, con la siguiente noción de consecuencia lógica

Consecuencia TT $\Gamma\Vdash A$ ssi $0\notin\sigma(A)$ siempre que $0\notin\sigma(B)$, para toda $B\in\Gamma$,

la transplicación satisface Identidad y No simetrías. Además, satisface una versión entimemática de Separación:

$A, A\rightarrow B \Vdash B\vee\sim(F\vee\sim F)$

donde F es una subfórmula de las premisas.

Así, si una conectiva es de un tipo o de otro depende no sólo de las condiciones de verdad y falsedad, sino también de la noción de consecuencia lógica. Pero no sólo eso: apelar a resultados como el **Teorema ERS** para decir que la transplicación no es un condicional revela que ciertas expectativas preteóricas también son muy decisivas para que aceptemos o rechacemos que una conectiva sea de cierto tipo.

Cabe responder que el Plan de Bochum no necesariamente está ligado al gentzenianismo modelo teórico. Pero entonces gran parte de su atractivo desaparece, porque decir que el significado de unas conectivas está determinado por las condiciones de verdad y el de otras está determinado por las condiciones de falsedad no es tan informativo: ¿cuándo las condiciones de verdad determinan el significado de una conectiva y cuándo lo determinan las condiciones de falsedad?

5. Semántica más allá del Plan de Bochum

Hay dos tesis muy importantes en el problema del significado de las conectivas lógicas:

Separatismo: el significado de una conectiva es independiente del de otras conectivas.

Interaccionismo: el significado de algunas conectivas depende del de otras conectivas.

En las propuestas separatistas suele estar implícita una tesis adicional:

Uniformidad: las condiciones que determinan el significado son del mismo tipo para todas las conectivas.

La discusión acerca de la transplicación sugiere que valdría la pena explorar el separatismo no uniformista.

Ya entrados en gastos, y recordando la importancia de las expectativas preteóricas, convendría explorar otras presentaciones de las lógicas y no sólo la tipo FDE, porque otras presentaciones y el énfasis en otras estructuras sugieren otras tesis filosóficas. Ejemplo:

A	B	$A\rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

El condicional como *inductor de orden*:

$1 \in \sigma(A \rightarrow B)$ ssi $\sigma(\mathrm{A}) \leq \sigma(\mathrm{B})$

$0 \in \sigma(A \rightarrow B)$ en cualquier otro caso.

El condicional como *identidad relativa*:

$\sigma(A \rightarrow B) = 1$si $\sigma(\mathrm{A}) = \sigma(\mathrm{B}) = 0$

$\sigma(A \rightarrow B) = \sigma(\mathrm{B})$ en cualquier otro caso.

El condicional como *operación hipotética*:

- Si $\sigma(\mathrm{A}) \neq 0$, $\sigma(A \rightarrow B) = \sigma(\mathrm{B})$, y si $\sigma(\mathrm{A}) = 0$, $\sigma(A \rightarrow B) \neq 0$

- Si $\sigma(\mathrm{A}) = 1$, $\sigma(A \rightarrow B) = \sigma(\mathrm{B})$, y si $\sigma(\mathrm{A}) \neq 1$, $\sigma(A \rightarrow B) \neq 0$

En la primera, si el último '$\neq 0$' se hace '$= 1$', se obtiene el condicional en **LP**.

En la segunda, si el último '$\neq 0$' se hace '$= \{1, 0\}$', se obtiene la transplicación.

MORALEJA:

Tenemos diferentes grupos de expectativas $S_1, \ldots, S_n$ de lo que sólo una conectiva *c*, que preteóricamente es una conectiva del tipo *K*, debe cumplir, y otro grupos de expectativas $F_1, \ldots, F_m$ de lo que sólo *c* debería incumplir;

en la lógica clásica, *c* puede caracterizarse por diferentes condiciones de evaluación $C_1, \ldots, C_n$, que de hecho sí se correlacionan con muchos E_i, aunque no todos, y también con muchos F_j.

Mi principio de prudencia es el siguiente: si dejamos fijas algunas de las C_i y modificamos las demás, podemos decir que *c* sigue siendo del tipo *K* mientras todavía satisfaga suficientes de las S_i e incumpla suficientes de las F_j. (¿Cuántas y cuáles son *suficientes*? ¡Bienvenides a la filosofía de la lógica!)

En cristiano: hay maneras de defender que las conectivas que aparecen en las lógicas contraclásicas son las que dicen ser, no hay *confusión*.

¡Gracias!