

Capítulo 3

Sobre la Relación Lógica de Pertenencia

Resumiendo lo visto en los capítulos anteriores, la concepción clásica puede caracterizarse como la suma de cuatro tesis íntimamente conectadas:

1. La concepción agregativa de la estructura. Ninguna parte constitutiva juega un papel diferente al de otra. Todas están contenidas por igual.¹
2. Análisis como definición explícita. Analizar es buscar las condiciones necesarias y suficientes de aplicación correcta de un concepto (de verdad de un enunciado, de validez de un argumento, etc.)
3. Analiticidad como contención. En todo juicio analítico un concepto es idéntico o está contenido en otro; comúnmente el predicado está contenido en el sujeto.
4. Contención como consecuencia lógica. Existe una sola relación lógica entre conceptos: que uno esté contenido en (o sea consecuencia lógica de) el otro.

Si bien esta concepción del análisis se mantuvo intacta y predominó a lo largo de muchos siglos, desde finales del siglo XIX, una nueva generación de lógicos y filósofos empezó a criticarla por ser insuficiente para dar cuenta de muchos fenómenos lógicos y semánticos. Aunque fueron muchos los que contribuyeron a esta crítica (Skolem, DeMorgan, etc.), Bertrand Russell fue el más acérrimo de los críticos a la concepción clásica. Russell se dio cuenta de que para representar fenómenos de cantidad, número, tiempo, espacio y movimiento (MacBride 2005b, Klement 2005) se requería de un análisis que fuera más allá

¹. Esto implica una especie de principio de extensionalidad para el contenido intensional de los conceptos; es decir, que conceptos que tengan las mismas partes constitutivas serán equivalentes.

de la búsqueda de partes constitutivas, y se preocupara también por el *orden* en que éstas se componían (Russell 1903). En este capítulo y el siguiente exploraremos algunas de las limitaciones básicas de la concepción clásica, tomando como eje las críticas de Russell a su tratamiento de las relaciones.

El tema de las relaciones es fundamental para cualquier tratamiento del análisis conceptual, pues lo que revela de un concepto este tipo de análisis no son sus propiedades no-relacionales de conceptos, sino precisamente sus relaciones lógicas con otros conceptos. Cuando proponemos a la conjunción de *creencia verdadera y justificada* como análisis del concepto *conocimiento*, por ejemplo, no definimos el conocimiento por sus propiedades intrínsecas o no-relacionales, sino por su relación lógica con otros dos conceptos, en particular, decimos que los implica a cada uno de ellos y a su vez es implicado por su conjunción. Como veremos en este capítulo, relaciones y propiedades (no-relacionales) muestran un comportamiento lógico muy distinto las unas de las otras. En este capítulo mostraré cómo el orden es un elemento fundamental de muchas relaciones (excepto las relaciones simétricas) y, sin embargo, es también algo de lo cual la concepción clásica es incapaz de dar cuenta. Además, mostraré también como el análisis contemporáneo da cuenta de este elemento fundamental de las relaciones gracias a las herramientas desarrolladas dentro de la teoría de conjuntos. La tesis fundamental de este capítulo es muy sencilla: Aún enunciados tan simples como “*Perro es una especie animal*” introducen problemas insuperables para el análisis clásico que requieren la introducción de un nuevo tipo de relación lógica (lo que llamaré, siguiendo una convención medieval, una nueva

cópula lógica), la pertenencia, la cual nos obliga a abandonar algunas de las tesis fundamentales de la concepción clásica.

I. *Análisis y Orden*

La concepción clásica está basada en una idea muy simple de la predicación y la relación entre lo abstracto y lo concreto: Como vimos en los primeros dos capítulos, las representaciones abstractas son menos específicas y más generales que las concretas. En términos de conceptos, esto significa que los conceptos (las representaciones abstractas) se predicán verdaderamente de algunos objetos y de otros no. Aquellos de los que se predicán con verdad (y sólo ellos) forman su extensión. A cada individuo en la extensión se le aplica el concepto por igual, es decir, no hay distinciones lógicas al interior de la extensión del concepto. Este modelo clásico concibe a los conceptos y a las representaciones abstractas en general, como predicados unarios. Como tal, es claramente insuficiente para dar cuenta de la estructura lógica de las relaciones (Moore 1919-20).

El problema fundamental que no permite que la concepción clásica dé cuenta de la estructura de las relaciones es el orden. A excepción de algunas relaciones simétricas (como “ser hermano de” o “estar junto a”), la mayoría de las relaciones establecen una diferencia importante entre los individuos que relacionan. No es lo mismo amar a ser amado, beber a ser bebido, ser padre de alguien o ser su hijo, estar a la izquierda o a la derecha. En la mayoría de los casos, el orden en que aparecen los individuos en una relación les asigna distintos papeles. Las proposiciones “Eduardo VII fue el padre de Jorge V” y “Jorge V fue el padre de Eduardo VII”, relacionan a los mismos términos y, sin embargo, no son la

misma proposición. Las relaciones, por lo tanto, no pueden tener una extensión en el mismo sentido que los predicados unarios. Desde el punto de vista del predicado unario, todos los objetos son iguales en su extensión. Pero no sucede lo mismo con las relaciones: no todos los individuos que entran en una relación lo hacen igual.

Para ilustrar la importancia del orden en el análisis de relaciones, basta tomar cualquier relación asimétrica, como *amar a alguien*, y compararla con un predicado monádico (es decir, no-relacional) como *ser calvo*.² Tomando una perspectiva tal vez antropocéntrica, podemos decir que el amor es una relación que se da entre (algunos) seres humanos, igual que la calvicie es una propiedad de algunos seres humanos. Ser humano es una condición necesaria del amor tanto como de la calvicie. Para amar o ser amado, o para ser calvo, es necesario primero ser humano. El sentido común parece decirnos que la única diferencia entre una relación como el amor y una propiedad como la calvicie, es que esta última se predica de un solo sujeto, mientras que las relaciones involucran a dos o más.

². Originalmente Russell presentó su teoría diciendo que la consecuencia lógica no puede capturar la relación sujeto-predicado (tal y como aparece en la definición kantiana de analiticidad), ya que ésta no es una relación simétrica. De manera célebre, Ramsey (1925) criticó esta concepción russelliana arguyendo que la relación sujeto-predicado sí es, en sentido relevante, simétrica: “Ahora me parece tan claro como algo puede serlo en filosofía que los dos enunciados “Sócrates es sabio” y “La sabiduría es característica de Sócrates” afirman el mismo hecho y expresan la misma proposición. No son, por supuesto, el mismo enunciado, pero tienen el mismo significado... Ahora bien, “Sócrates” es el sujeto de uno de los enunciados, mientras que “Sabiduría” lo es del otro; y así cuál de los dos sea el sujeto y cuál el predicado depende del enunciado en particular que usemos para expresar la proposición, y no tiene nada que ver con la naturaleza lógica de Sócrates o de la sabiduría ... De la misma manera, con un lenguaje suficientemente elástico cualquier proposición puede expresarse de tal manera que cualquiera de sus términos sea el sujeto. De ahí que no haya una diferencia esencial entre el sujeto y el predicado de una proposición, ni se puede basar en dicha distinción una clasificación fundamental de objetos.” (Ramsey 1925, 12. Mi traducción) Por ello, en mi exposición no sigo la presentación original de Russell, sino que le trato de dar una formulación más intuitiva y contemporánea.

Para estar calvo, Juan no necesita a nada o a nadie más.³ Para amar Juan necesita a *alguien* a quien amar.

Sin embargo, esta visión de sentido común pronto encuentra dificultades. Basta darse cuenta de que el amor es una relación asimétrica. No es lo mismo *amar* a alguien que *ser amado* por alguien. Pongamos un ejemplo simple. Supongamos que Juan ama a María. Sería muy sencillo decir que el amor es una relación que se da entre Juan y María. Sin embargo, para subrayar su carácter asimétrico, supongamos que el amor de Juan por María no es correspondido, es decir, supongamos que María no ama a Juan. Entonces deberíamos decir que el amor se da en un sentido pero no en el otro. De ahí que debamos concluir que el amor no es simplemente una relación que se da entre dos personas, sino que se da entre dos personas *en cierto orden*. En nuestro ejemplo, se da de Juan hacia María, pero no de María a Juan. El orden es esencial.

Si descompusiéramos en sus partes “Juan ama a María” y “María ama a Juan”, veríamos que aunque distintos, ambos enunciados tienen las mismas partes. Entonces, si el análisis se redujera a descomponer en partes, no podría dar cuenta de este tipo de diferencias. En casos como este, no es suficiente determinar cuáles son las partes constituyentes de un concepto o proposición, es necesario también determinar cómo están ordenadas. Si pensamos en María, Juan y el Amor como piezas de un rompecabezas, veremos que las diferentes maneras en que se engarcan entre sí pueden dar resultados diferentes. Si las arreglamos en cierto orden, tendremos que María ama a Juan. Si

³. En realidad también esto último puede resultar falso en un análisis más profundo. Calvo puede también ser un predicado relacional, pues según algunas teorías contextualistas sobre predicados vagos, nadie puede ser calvo sino en comparación con alguien más (Shapiro 2006.)

cambiamos el orden, tendremos que Juan ama a María. Una vez más, el orden es importante. La diferencia entre una relación y una propiedad no-relacional no es por lo tanto, sólo de grado, sino de tipo.

Las relaciones lógicas involucradas en el análisis no son la excepción. Decir que el concepto *conocimiento* contiene al de *creencia* no es lo mismo que decir que el concepto *creencia* contiene al de *conocimiento*. El orden es importante. Si el objetivo del análisis es dar cuenta de este tipo de relaciones lógicas, parece que debería de darle una importancia central al orden. Sin embargo, esto no es así, ya que aunque la relación de contención asigna diferentes papeles a su relata, las propiedades relacionales que se derivan de ella, en tanto propiedades unarias, no lo requieren, y mientras unas puedan reducirse a las otras, el defensor del análisis clásico puede continuar ignorando el orden en su concepción del análisis.

Decir que una relación pueda reducirse a propiedades relacionales no quiere decir más que todo enunciado de la forma aRb puede parafrasearse en una oración de la forma $Fa \& Gb$.⁴ La proposición de que Juan ama a María, además de establecer una relación entre Juan y María, también expresa una propiedad (por ello llamada “relacional” o “extrínseca”⁵)

⁴ Como Moore (1919-1920) ha ya señalado, esta verdad incontrovertible no debe confundirse con la muy controversial tesis fundamental del *monadismo* según la cual “toda relación entre dos términos es reducible a las propiedades de los términos tomados de manera separada (de tal manera que una proposición de la forma aRb puede representarse de manera más perspicua en una proposición de la forma $Fa \& Gb$)” (MacBride 2005b, p. 99. Traducción mía.) La diferencia fundamental entre esta tesis y la monadista, es que la tesis monadista requiere que las propiedades a las que se reduzca la relación sean no-relacionales, es decir, sean propiedades que posean los referentes de los términos en independencia el uno del otro.

⁵ Sin embargo, muchos filósofos no usan los términos “propiedad relacional” y “propiedad extrínseca” como sinónimos (Humberstone 1996).

de Juan (la de amar a María) y otra propiedad de María (la de ser amada por Juan) en forma conjunta. De esta manera, todo enunciado relacional puede parafrasearse como la conjunción de varios enunciados más simples, cada uno con un solo sujeto y una propiedad como predicado.

Aplicado a un juicio analítico como “*Conocimiento* contiene a *creencia*”, este simple hecho nos muestra que éste, puede verse tanto estableciendo una relación lógica entre los conceptos *creencia* y *conocimiento*, como expresando una propiedad lógica relacional del concepto *Conocimiento* (la de contener al concepto *Creencia*) y otra propiedad distinta del concepto *Creencia* (la de estar contenida en el concepto *Conocimiento*) en forma conjunta. De esta manera, todo enunciado analítico mantiene la forma simple sujeto/predicado(unario), donde el sujeto refiere a un concepto y el predicado refiere a una propiedad relacional de la forma “está contenido en x ” para algún concepto x ; y como este predicado, aunque relacional, es unario, no establece diferencias al interior de su extensión y, por lo tanto, obedece a los cánones de la concepción clásica del análisis.

Nótese cómo este simple cambio de perspectiva, de relaciones a propiedades, permite dar cuenta de la diferencia entre “*Conocimiento* contiene a *creencia*” y “*Creencia* contiene a *Conocimiento*”, sin tener que abandonar ninguna de las tesis fundamentales de la concepción clásica. Desde su forma superficial, podemos ya ver que los dos enunciados son claramente diferentes; tienen distintos sujetos y diferentes predicados. El primero tiene como sujeto a “*conocimiento*” y el segundo a “*creencia*”. El primero tiene como predicado “contiene a *creencia*” y el segundo “contiene a *conocimiento*”. No es de sorprender, por lo tanto, que ambos enunciados prediquen diferentes propiedades lógicas de distintos

conceptos. El primero predica del concepto *conocimiento* la propiedad de *contener a 'creencia'*, y el segundo predica de *creencia* la propiedad *contener a 'conocimiento'*. Dado que *conocimiento* es distinto de *creencia*, *contener a conocimiento* es distinto que *contener a creencia* y en consecuencia, que *conocimiento* contenga a *creencia* es diferente de que *creencia* contenga a *conocimiento*.

Esta explicación no menciona en absoluto la relación de contención que, por lo menos *prima facie*, parece ser común a ambos enunciados. En vez de una relación común, lo que tenemos son dos propiedades distintas: la contención de *conocimiento* en *creencia* y la contención de *creencia* en *conocimiento*. Bajo esta perspectiva, las relaciones lógicas desaparecen y lo único que necesitamos en el análisis final son propiedades lógicas. Una vez que las relaciones lógicas han sido eliminadas, deja de ser necesario apelar a ningún tipo orden y el problema que la concepción clásica parecía tener desaparece.

Recordemos que, en la concepción clásica del análisis, todos los conceptos contenidos dentro de un concepto dado son consecuencia lógica de él⁶ y están contenidos en él sólo y precisamente porque son sus consecuencias lógicas. Todos los componentes de un concepto comparten esta propiedad lógica de manera tal que decir que un concepto contiene a otro *no es más* que decir que uno es consecuencia del otro (A esto es a lo que he llamado al principio de este capítulo la tesis de “la contención como consecuencia lógica”). Pero si esto es todo lo que se puede decir al decir que un concepto contiene a otro y, por lo tanto, esto es todo lo que el análisis nos puede develar sobre la relación lógica entre

⁶ O, él es consecuencia lógica de cada uno de ellos por separado, dependiendo de si adoptamos una perspectiva aditiva o substrativa. En el resto del capítulo adoptare la perspectiva substractiva, por ser la más conocida, aunque debe tenerse en cuenta que todo lo dicho en el capítulo desde una perspectiva es también cierto, de manera dual, de la otra.

conceptos, entonces no hay manera de distinguir entre componentes al interior de un concepto. Todos los componentes de un concepto son sus consecuencias lógicas pro igual y no hay ninguna diferencia lógica entre un componente u otro. Como no hay diferentes maneras en las que un concepto puede ser consecuencia lógica de otro, tampoco hay manera de distinguir o asignar diferentes roles lógicos a los componentes de un concepto. De esta manera, lo que al principio de este capítulo he llamado la concepción agregativa de la estructura es consecuencia lógica de lo que también he llamado la tesis de “la contención como consecuencia lógica.”

Para ilustrar de manera muy clara cómo la descomposición clásica ignora pro completo el orden de los componentes de un concepto, tomemos uno de los ejemplos más conocidos de análisis clásico: supongamos que analizamos substractivamente el concepto “humano” y lo descomponemos en los conceptos “animal” y “racional.”⁷ Tal y como lo explicamos en el capítulo anterior, esto significa que ser animal y ser racional son condiciones necesarias (cada una) y (conjuntamente) suficientes para ser humano. Dentro de la concepción clásica diríamos también que “humano” contiene a “animal” y “racional”, y que el orden en que los contiene es indistinto. Es lo mismo decir que el ser humano es un animal racional que decir que es un racional animal. Todos los animales que son racionales son seres racionales que son animales. Cualquier orden que se trate dar a los elementos de una descomposición clásica sería tan artificial como el célebre árbol de Porfirio (Eco 1988). El orden de las condiciones necesarias y suficientes no altera la composición clásica de lo abstracto. Esto se debe a que la disyunción y la conjunción, las operaciones lógicas que

7. Aunque este ejemplo es un análisis substractivo en dos componentes, lo dicho se puede generalizar también al análisis aditivo y en cualquier número de componentes.

subyacen en la concepción clásica de la estructura de las representaciones abstractas, son simétricas. La adición lógica de A y B es lógicamente equivalente a la adición de B y A . El orden de los disyuntos no altera la disyunción. De igual manera, la conjunción de A y B equivale a la conjunción de B y A . El orden de los factores tampoco altera el producto lógico.

En resumen, mientras el análisis considere una sola relación lógica entre conceptos: (la contención o consecuencia lógica), todos los componentes de un concepto estarán igualmente relacionados con el concepto del que son componentes, es decir, no habrá lugar para distinguir entre diferentes componentes lógicos. Sólo si hubieran otras maneras en que un concepto esté relacionado lógicamente con otro (irreducibles a la relación de consecuencia lógica⁸), tendría sentido establecer algún orden o estructura entre los diferentes componentes de un concepto. Solo así podríamos distinguir, por lo menos, entre aquellos componentes de un concepto que están relacionados con él de la primera manera y aquellos que están relacionados con él de la segunda. Introducir una relación de este tipo es el objetivo de la segunda parte de este capítulo. En él motivaremos la introducción de una nueva relación o cópula lógica entre conceptos, la relación de pertenencia, y mostraremos cómo su introducción permite dar cuenta del orden entre los relata de una relación, a través de la noción de par ordenado.

⁸ Como indicamos a finales del capítulo anterior, por supuesto que hay muchas maneras en que dos conceptos pueden estar relacionados entre sí. Por ejemplo, uno puede ser la disyunción o adición lógica de otros, o puede ser la negación de otro más; pero todas las relaciones lógicas que contempla la concepción clásica del análisis (las funciones lógicas proposicionales básicas y las que introducen los cuantificadores de primer orden, por ejemplo) son reducibles a la de consecuencia lógica.

II. *¿Es necesaria otra relación lógica entre conceptos además de la consecuencia lógica?*

Para motivar la introducción de una nueva cópula lógica en el análisis lógico conceptual, introduciré un problema que nos obliga a distinguir dos maneras en que un concepto puede *contener* otro o ser *parte* de él. En un sentido clásico, la relación es transitiva. Si algo es parte de otra cosa, las partes de lo primero lo serán también de lo segundo. Por ejemplo, si A contiene a B y B contiene a C , A contiene a C . Si A es condición necesaria de B y B es condición necesaria de C , entonces A es condición necesaria de C . Si A es consecuencia lógica de B y B es consecuencia lógica de C , entonces A es consecuencia lógica de C , etc. En el segundo sentido, la relación no es transitiva: es posible que un objeto A esté contenido en otro B sin estar contenido en todo lo que contiene a B . El símil clásico es pensar en los conceptos como cajas que contienen a los individuos en su extensión. Si una caja está dentro de otra, no podemos decir que lo que está dentro de la primera está también dentro de la segunda. Lo que está dentro es la caja, no los objetos que contiene. En teoría de conjuntos, esta distinción corresponde a aquella que hay entre la relación de subconjunto (que es transitiva) y la de pertenencia (que no lo es). Introducir esta distinción revolucionó el análisis pro completo. La nueva herramienta permitió al análisis penetrar más profundamente en la estructura de lo abstracto. En la última sección de este capítulo, veremos cómo la nueva herramienta permite modelar la relación de orden que había causado tantos problemas al análisis clásico.

1. Más allá de las cópulas esencial y accidental

Considérese el siguiente argumento simple:

Ejemplo 1

1. Juan está soltero.
2. Estar soltero es no estar casado.
3. Por lo tanto Juan no está casado.

Según la teoría clásica hasta ahora expuesta, la primera premisa del argumento es un enunciado sintético, donde la cópula accidental enlaza un término concreto (“Juan”) con otro abstracto (“soltero”) en suposición personal. La segunda premisa es el ejemplo típico de enunciado analítico, donde dos términos abstractos (“soltero” y “no casado”) en suposición simple, se ligan a través de la cópula esencial. Finalmente, la conclusión es otra vez un enunciado sintético, donde la cópula accidental enlaza un término concreto (“Juan”) con otro abstracto (“no casado”) en suposición personal.

La validez del argumento anterior se puede explicar en términos de la *distributividad* de la cópula accidental sobre la esencial. Un argumento de transitividad (como el del ejemplo 1) no puede tener una consecuencia más fuerte que la más débil de sus premisas. Como la cópula accidental es más débil que la esencial, la conclusión no puede ser analítica, sino que debe ser sintética.

Pese a lo intuitivo de esta regla, parece tener contraejemplos como el siguiente:

Ejemplo 2

- 1'. Peluchín es un perro
- 2'. Perro es una especie animal,
- 3'. Por lo tanto Peluchín es una especie animal.

Una vez más, tenemos un argumento cuya primera premisa es sintética, su segunda premisa analítica y un término medio común (“perro”) que debería garantizar la conclusión sintética 3’. Sin embargo, este argumento, a diferencia del primero, no es válido.

¿Cómo explicamos la invalidez del ejemplo 2 y sobre todo, su diferencia con casos como 1? Probablemente, el primer punto sería darnos cuenta de que la segunda premisa 2’, pese a contener dos términos abstractos (y por lo tanto, ser supuestamente un enunciado analítico cuya cópula es esencial), parece ser de un *tipo* distinto a la segunda premisa 2 del ejemplo anterior. Esto queda aún más claro cuando uno se da cuenta de que la premisa 2’ se puede transformar en un enunciado universal como

2*. Todos los solteros no están casados

Pero esta transformación no sería aceptable para la segunda premisa del segundo argumento (¡“Todo perro es una especie animal”).

Como vimos antes, pese a compartir cierta forma gramatical superficial con generalizaciones genuinas (es decir, sintéticas) como “Todo soltero es feliz” o “Ningún juez de la Suprema Corte está casado”, los enunciados analíticos no establecen ninguna conexión accidental entre las extensiones de sus términos, sino una relación esencial entre conceptos. Darnos cuenta de esto abre dos posibles maneras de explicar la diferencia de estatus lógico de argumentos como 1 y 2. La primera propuesta, que llamaré *fregeana*, trata de rescatar la concepción clásica al precio que sea; es decir, trata de mantener la consecuencia lógica como la única cópula esencial entre conceptos. Esto significa que toda verdad conceptual debe corresponder a un enunciado analítico de la forma: todos los *x* son (necesariamente) *y*. El precio de mantenerse fiel a la concepción clásica es tener que

rechazar como mal formados enunciados como “perro es una especie animal”, o por lo menos, considerarlos inaceptables en un lenguaje ideal). La respuesta fregeana no es *ad-hoc*. Por el contrario, es fácil ver el error gramatical cometido en enunciados como 2'. Después de todo, “perro” es un adjetivo y, como tal, no puede figurar de sujeto en ningún enunciado.

Frege defiende esta estrategia en “Sobre concepto y objeto” (1996), aunque también es una táctica nominalista, pues los nominalistas comparten con Frege la tesis de que los conceptos **no** son objetos. Para filósofos como Frege, Ramsey o Quine, el problema con enunciados como 2', no es solamente que funcionan de manera diferente a enunciados analíticos como 2, sino que su funcionamiento es *demasiado parecido* al de enunciados sintéticos particulares como 1 y 1'. En ellos se tratan los conceptos como si fueran objetos. En este punto, la diferencia principal entre un platonista como Frege, y los nominalistas es el tipo de razón para distinguir ontológicamente conceptos de objetos. Para Frege, el motivo es eliminar cualquier posibilidad de circularidad, por miedo a caer en paradojas. La razón de los nominalistas para hacer esto, es tratar de mantener una ontología ligera. El talón de Aquiles de ambas propuestas es que exiliar ciertas expresiones del lenguaje del análisis, debilita mucho su expresividad.⁹ Algunos neo-Fregeanos y algunos nominalistas han hecho avances sorprendentes en el desarrollo de lenguajes artificiales donde se respetan las cópulas de la concepción clásica. Pero los resultados han dejado mucho que desear en términos prácticos.

⁹. Como veremos adelante, esto implica rechazar como sinsentido, entre otras cosas, a la teoría de conjuntos clásica.

Pero surge también naturalmente otra propuesta. Se podría introducir una nueva distinción semántico-ontológica dentro de lo abstracto, y podríamos decir que el segundo ejemplo sufre de una falacia de equivocación en el término “perro”. La palabra “perro” significa de manera muy diferente en la primera y segunda premisas. En español –que no es un lenguaje fregeano en este u otros aspectos)– indicamos esta diferencia con técnicas convencionales como el entrecomillado y las itálicas. Así, en vez del malformado (2’) “perro es una especie animal”, usamos (2’’) “*perro* es una especie animal”. En una “perro” funciona como adjetivo; y en otra “*perro*” es un sustantivo. De esta manera, hacemos explícita la equivocación en el argumento 2. Una vez que distinguimos los diferentes sentidos de la palabra “perro” y los diferentes tipos de cópulas involucrados, podemos comparar más claramente la estructura lógica de las dos primeras premisas del primer ejemplo:¹⁰

1’. Peluchín [concreto] es [cópula accidental] un perro [predicado en suposición personal].

2’’. *Perro* [sustantivo abstracto en suposición simple] es [nueva cópula esencial] una especie animal [predicado en suposición simple]

El segundo paso necesario sería caracterizar la nueva cópula esencial que ocurre en 2’’. Para explicar la equivocación en el argumento 2, es necesario que esta cópula no sea transitiva,¹¹

¹⁰. De esta manera, además de los términos abstractos normales, que tienen su posición simple y personal, podemos postular que hay también términos abstractos puros que solo tienen suposición simple, ya que sólo se aplican a objetos abstractos. Ejemplos de este segundo tipo de términos abstractos serían “especie animal”, “categoría biológica”. “objeto abstracto”, etc.

¹¹. Esta cópula no es transitiva, porque de que A pertenezca a B y B pertenezca a C no siempre se sigue que A pertenezca a C. Esta propiedad es fundamental para distinguir la pertenencia de la cópula clásica introducida en los primeros dos capítulos; la cual sí es transitiva.

y que la cópula accidental no se distribuya sobre ella. A esta nueva cópula esencial, le corresponde también una nueva cópula accidental aun más débil que la cópula accidental anterior. De esta manera será esta segunda cópula accidental la que se distribuya sobre la nueva cópula esencial. Así podemos reconstruir el ejemplo 2 de la siguiente manera:

1'. Peluchín es un perro

2". *Perro* es una especie animal

3". Por lo tanto Peluchín pertenece a una especie animal.

Esta reconstrucción del argumento es válida, pero en ella se hace una reinterpretación de la cópula en la conclusión, pasando de la cópula accidental “es” a la nueva cópula esencial débil “pertenece a” o “es miembro de” (en vez de “está contenido en”).¹² Ahora ya podemos analizar las conclusiones del segundo argumento original y de su reconstrucción válida:

3'. Peluchín [concreto] es [cópula accidental] una especie animal [predicado en suposición simple]

3". Peluchín [concreto] pertenece a [nueva cópula esencial] una especie animal [predicado en suposición simple]

Bajo esta nueva interpretación, la equivocación en el argumento original aparece claramente: “perro” tiene suposición personal en la primera premisa y suposición simple en la segunda.¹³ El segundo argumento, en contraste, es válido porque hace explícito en la

¹². Para una historia detallada del desarrollo matemático de la relación de pertenencia y la teoría de conjuntos que de ella emana, cf. Kanamori (1996).

¹³. Nótese que desde un punto de vista lógico, “perro” y “perro” no son diferentes palabras, sino la misma palabra con diferente suposición.

conclusión 3”, el tipo de cópula que hay entre el perro concreto (Peluchín) y el abstracto en suposición simple (la especie *perro*). Es decir, si “Pertenece a (la extensión de)” o “es miembro de”; por lo tanto aparece como un nuevo tipo de cópula que puede ser accidental (cuando enlaza un concreto con un abstracto, como en 3”) o esencial (cuando enlaza abstractos en suposición simple, como en 2’).

Estas dos maneras de entender esta cópula, corresponden a lo que Penelope Maddy (1997, 42) llama las concepciones matemática y lógica de *colección*. La concepción matemática de colección corresponde a la noción matemática de conjunto dentro de la concepción iterativa (predominante).¹⁴ En esta concepción sólo los conjuntos pertenecen a conjuntos. La relación de pertenencia, por lo tanto, siempre es esencial (nunca accidental), y sólo se da entre conjuntos.¹⁵ La concepción lógica, a su vez, corresponde a la relación entre particulares y generales de la concepción clásica aditiva, la cual admite abstractos con miembros concretos. La concepción lógica, por lo tanto, no distingue entre la pertenencia accidental y la pertenencia esencial. En filosofía, en general, no se tiene a distinguir entre estas dos copulas, y cuándo se hace, la cópula accidental se suele expresar con frases como “es una instancia de”, “tiene la propiedad”, “cae bajo la extensión de”, etc.

La adopción de esta nueva cópula tiene consecuencias importantes. Por su falta de transitividad, la cópula de pertenencia induce a una jerarquía de niveles de abstracción. En cada nivel, las representaciones abstractas pueden predicarse (mediante la cópula de

¹⁴. En matemáticas se distingue la pertenencia esencial (simbolizada por “ \in ” dentro de la teoría de conjuntos) de la accidental.

¹⁵. Por eso las proposiciones de la teoría de conjuntos pura (sin urelementos) son necesarias. A su vez, los conjuntos matemáticos puros corresponden a lo que en una nota anterior he llamado abstractos puros.

pertenencia) sólo de representaciones abstractas del nivel inmediatamente anterior. Esta nueva jerarquía de lo abstracto es radicalmente distinta de la jerarquía de generalidad de la concepción clásica. En primer lugar, no permite juicios analíticos más que entre representaciones de niveles inmediatamente contiguos: por ejemplo, “*Perro* es una especie animal” es aceptable (como enunciado analítico), pero “*Peluchín* es una especie animal” no lo es. En segundo lugar, la jerarquía de pertenencia no respeta la jerarquía extensional clásica. “Especie animal” es de un nivel superior a “perro”, y sin embargo, no es extensionalmente más general que aquella. Por un lado, no todos los perros son especies animales y por otro, es posible que haya más perros que especies animales. Finalmente, tampoco es intencionalmente más simple que ella, ya que no todo constituyente del concepto “especie animal” es también un constituyente de “perro” (probablemente, ninguno lo sea).

Sin embargo, como ambas cópulas coexisten en el lenguaje, ambas jerarquías se pueden conjuntar, de tal manera que en cada nivel de abstracción por pertenencia se da una jerarquía clásica. De esta manera, las representaciones del mismo nivel de pertenencia pueden ordenarse por su nivel de generalidad. La teoría clásica de conjuntos combina ambas cópulas y sus jerarquías, distinguiendo entre la relación de *subconjunto* (la cual es transitiva, reflexiva y asimétrica; y por lo tanto, corresponde a la cópula de la teoría clásica) y *pertenencia* (la cual no es transitiva, ni reflexiva y mucho menos simétrica, por lo que modela bien la nueva cópula).

III. Pares Ordenados

Una manera de rescatar la intuición básica detrás de la concepción clásica del análisis, es conciliarlo con la tesis russelliana de que no podemos analizar las proposiciones relacionales sin tomar en cuenta algún tipo de orden. Esto se logra mediante lo que ahora llamamos “*pares ordenados*”. Recordemos que el problema surgía de la aparente diferencia radical entre predicar una propiedad de un objeto y predicar una relación entre dos o más objetos. La diferencia parecía ser que mientras el primer tipo de enunciados podía concebirse simplemente como la composición de sujeto y predicado, el segundo tipo de enunciados necesitaba tomar en cuenta algún tipo de orden. Para ilustrar esta asimetría, consideramos los enunciados

1. Juan es calvo
2. Juan ama a María
3. María ama a Juan

Si bien (1) puede verse como simplemente la composición de *Juan* y la propiedad de *ser calvo*, no podemos decir lo mismo de (2), porque tiene los mismos elementos que (3) y sin embargo, no son enunciados equivalentes.

La nueva propuesta consiste en descomponer los enunciados (2) y (3), no en *tres elementos* —“Juan”, “María” y la relación “ama a”— sino en *dos*, tal como lo hicimos con el enunciado (1). Estos dos elementos serán por un lado, la relación de *amar* y por el otro, el *par ordenado* de Juan y María. Tradicionalmente usamos la notación “<Juan, María>” para señalar no al par de Juan y María, sino al *par ordenado* que tiene como primer miembro a Juan y como segundo a María. Podemos explicar así que Juan ame a María sea diferente a

que María ame a Juan, apelando simplemente a las partes de cada enunciado: mientras el primer enunciado contiene al par ordenado como $\langle \text{Juan}, \text{María} \rangle$, el segundo lo contiene como $\langle \text{María}, \text{Juan} \rangle$.

Así, en vez de hacer una distinción fuerte entre propiedades y relaciones, volvemos a un tipo más sofisticado de monismo que el que criticó Russell; en este monismo en vez de diferentes tipos de predicados (propiedades y relaciones), tenemos diferentes tipos de sujetos (objetos y conjuntos ordenados de objetos). Por supuesto que estos objetos y conjuntos no son “sujeto” y “predicado” en el sentido usual. El par ordenado $\langle \text{Juan}, \text{María} \rangle$ no es el sujeto gramatical de “Juan ama a María”; por lo tanto, es mejor utilizar en este caso la terminología matemática de *argumentos* y *funciones*. Podemos analizar así el enunciado (1) como compuesto de la función “ x es calvo” y el argumento “Juan”; y a (2) como compuesto de la función “ x_1 ama a x_2 ” y el argumento $\langle \text{Juan}, \text{María} \rangle$. De esta manera, hacemos justicia a la asimetría russelliana entre propiedades y relaciones: las relaciones son funciones que en vez de requerir un objeto simple como argumento, requieren conjuntos ordenados.

El russelliano podría replicar, por supuesto, que esta solución aparente no hace sino trasladar el problema del enunciado a par ordenado. Efectivamente, falta explicar en qué se distingue el análisis del par $\langle \text{Juan}, \text{María} \rangle$ del par $\langle \text{María}, \text{Juan} \rangle$, cuando ambos parecen estar compuestos de las mismas dos personas. Una vez más, es necesario reconocer la

importancia del orden en el análisis y por lo tanto, la insuficiencia de la concepción clásica para analizar casos incluso tan simples como que Juan ame a María sin ser correspondido.¹⁶

Una vez que contamos con la segunda cópula, podemos resolver este problema. Sorprendentemente, una vez que contamos con la relación de pertenencia, podemos modelar los pares ordenados y por lo tanto, modelar los enunciados relacionales bajo el esquema función-argumento. La manera más famosa de hacerlo fue descubierta por Kuratowski aunque otra manera muy elogiada por Russell, ya había sido descubierta por Norbert Wiener.¹⁷ La idea básica es muy sencilla: un par ordenado se distingue de una mera colección de dos elementos en la que el primero está ordenado y el segundo no. Esto significa que para que un par sea ordenado basta que podamos distinguir su primer elemento del segundo. En otras palabras, basta poder reconocer que el par ordenado está relacionado de manera diferente con cada miembro. Contando con la cópula de pertenencia, existen múltiples maneras de hacerlo. Una de las más sencillas y la más conocida, explota la intransitividad de la relación de pertenencia, permitiendo que cada uno de los elementos del par acceda a un diferente nivel de pertenencia.

Regresemos a nuestro ejemplo: el par ordenado <Juan, María>. No podemos descomponer el par simplemente en Juan y María, porque entonces no tendríamos manera de distinguirlo del par <María, Juan>. Debemos poder distinguir entre la manera en que Juan y María aparecen en un par y otro. La elegante solución de Kuratowski fue proponer la convención de que al par <Juan, María> no pertenezcan directamente ni Juan ni María,

¹⁶. Otra opción sería que los pares ordenados fueran átomos inanalizables, pero esto no sólo postularía un sinnúmero de nuevos entes, sino que también haría difícil explicar en qué sentido las relaciones involucran a sus relatas (además de esos extraños entes que son los pares ordenados).

¹⁷. Para un detallada historia del par ordenado, cf. Kanamori (2003).

sino otros dos elementos que llamaré P (de “primero”) y S (de “segundo”). A través de estos dos elementos el par ordenado se relaciona con los objetos que ordena. Para distinguir P de S , ponemos al primer elemento del par, Juan, dentro de P (de tal manera que Juan sea lo único que pertenezca a P) y dentro de S ponemos a ambos elementos (Juan y María). Así, Juan pertenece tanto a P como a S , mientras que María pertenece solo a S . De esta manera, podemos distinguir el primer elemento del par ordenado como aquel que pertenece a todos los miembros del par (Juan), y al segundo como aquel que solamente pertenece a uno (María). En términos de teoría de conjuntos, el par ordenado $\langle \text{Juan}, \text{María} \rangle$ quedaría modelado por el conjunto $\{\{\text{Juan}\}, \{\text{Juan}, \text{María}\}\}$; es decir, por el conjunto cuyos únicos miembros son $\{\text{Juan}\}$ y $\{\text{Juan}, \text{María}\}$.¹⁸ De esta manera, el problema del orden y el problema de la transitividad de la cópula de la concepción clásica se resuelven a la vez.

¹⁸. El conjunto $\{\text{Juan}\}$ no debe confundirse por supuesto, con Juan mismo. Este conjunto de Juan, conocido como el “conjunto unitario” [“singletón” en inglés], tiene a Juan como único miembro. La idea de un conjunto con un solo miembro, o de un abstracto cuya extensión sea solamente un objeto, parece bastante contra-intuitiva, y a decir verdad fue rechazada durante mucho tiempo. Sin embargo, su facilidad para permitir explicaciones más unificadas como las de este capítulo la ha hecho casi indispensable (Kanamori 2003).